試閱本

9.1 泰勒展開：多項式逼近函數

CalcGospel
微積分福音

■ 9.1 泰勒展開：多項式逼近函數

多項式是一個很棒的函數，好處之一是它可以求導無限多次。這種函數應該發予良民證，實在太棒了！不過就這點而言還不夠特別，指數函數、三角函數也都可以發予良民證。

多項式還有一個好處是比較好代值，譬如說 $p(x)=x^{23}-5x^{18}+7x^{11}+6x^3-8$, 如果我們要算 $p(3.01)$, 很煩, 但起碼還能算。那如果是遇到其它函數呢？譬如說 $\sin(1)$, 就不會算那麼久了，因為根本不會。

數學上常常是化繁為簡、化未知為已知。所以就有個想法，當我遇到一個函數 $f(x)$，可不可以寫出一個多項式 $p(x)$，是可以跟它非常接近的呢？至少，在我要算的點的附近是很接近的。譬如說剛剛的 $\sin(1)$，如果我的多項式只能在 $[-1,2]$ 上跟 $\sin(x)$ 很接近，那其實也夠用了。待我將這個多項式寫出來之後，凡是在這「附近」裡面，我就可以將原本想對 $f(x)$ 做的事情，改對 $p(x)$ 做，舉凡加、減、乘、除、次方、代入、微分、積分等等。所以當然，這個「附近」的範圍，能越大就越好。

舉個例子，下圖有條曲線 $f(x)=\frac{x^3-6x^2+9x+3}{1.58^x}$，它並不是多項式。現在，我找到一個三次多項式 $p(x)=12.241687-8.2648x+1.7988x^2-0.1065x^3$，它與 $f(x)$ 在 $x=3$ 的附近還蠻接近的。離 $x=3$ 遠一點之後，兩條曲線才越差越多。千萬不要被我的例子的函數長相嚇到了，在後面我們並不需要找出長這麼醜的多項式。

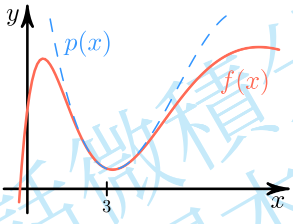

圖 9.1: 以多項式逼近函數

牛頓在處理某些函數時，用了一些奇技淫巧寫出

多項式來逼近[①]。後來他的一個學生，Brook Taylor，在 1715 年時，提出一般性的理論，探討求出一個函數的多項式逼近的一般方法。

如果我們現在想找個 $p(x)$ 在 $x = a$ 的附近去逼近 $f(x)$。這個逼近的想法是這樣的：首先，兩個函數值 $f(a)$ 與 $p(a)$ 當然希望能一樣。接著，假如 $f(x)$ 可導的話，若它們在 $x = a$ 處的切線斜率也能夠一樣，那麼這兩個就更接近了。也就是說，兩者一階導數相等 $f'(a) = p'(a)$，這叫做一階切近。再來，假如 $f(x)$ 二階可導，如果又有 $f''(a) = p''(a)$，那麼這兩個便更加接近了，這叫做二階切近。以此類推、得寸進尺。只要 $f(x)$ 是 k 階可導，我都希望 $f^{(k)}(x)$ 與 $p^{(k)}(x)$ 能夠相等，這叫做 k 階切近。如果 $f(x)$ 在 $x = a$ 處無窮可導的話，那我就希望寫一個冪級數，可以與 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的任意階導數都相等。

k 階切近

$f(x)$		$p(x)$
$f(a)$	$=$	$p(a)$
$f'(a)$	$=$	$p'(a)$
	$\vdots$	
$f^k(a)$	$=$	$f^k(a)$

按此想法，便可以將一個無窮可導的函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處展開成：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \qquad (9.1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

它的一般項形式是 $\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$。為什麼會這樣呢？為了檢驗等號右邊的確就是我們理想中的 $p(x)$，我們試著

① 事實上，在微積分草創時期，除了牛頓也有其它許多數學家諸如 Gregory、萊布尼茲、Johan Bernoulli、棣美弗等等，都寫出某些函數的多項式逼近。

在等號右邊代 $x=a$、求導之後代 $x=a$、求導兩次之後代 $x=a$、……看看是否分別都等於 $f(a)$、$f'(a)$、$f''(a)$、……。

直接代 a，一次項以上全部都有 $(x-a)$，所以代入以後全是零，只剩 $f(a)$：

$$f(a)=f(a)+0+0+\cdots \tag{9.2}$$

若是我們對等號兩邊先求導一次，得到

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0+f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}\times 2(x-a) \\ &\quad +\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\times n(x-a)^{n-1}+\cdots \end{aligned} \tag{9.3}$$

此時常數項 $f(a)$ 求導後不見了。至於二次以上的項，求導完都至少還有一個 $(x-a)$ 。接著代 $x=a$，得到

$$f'(a)=0+f'(a)+0+\cdots+0+\cdots \tag{9.4}$$

所以在求導完之後代 a 時，二次以上的項也全跟著不見了，於是只剩一次項。而原來一次項 $f'(a)(x-a)$ 求導後，就是 $f'(a)$ 。

一般而言，求導 n 次後

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= 0+0+\cdots+f^{(n)}(a) \\ &\quad +f^{(n+1)}(a)(x-a)+\cdots \end{aligned} \tag{9.5}$$

所有 $n-1$ 次以下的項全部變成零，而 $n+1$ 次以上的項，在求導完以後全部都還有至少一個 $(x-a)$，所以在微完之後代 a 時，它們也全跟著不見了，所以只剩 n 次項。而 n 次項 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 求導 n 次以後，也成為常數。值是多少呢？因為求導 n 次以後會乘以 $n!$ [2] ，所以就是 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\times n!=f^{(n)}(a)$ 。在以上的檢驗過程中，你大概就能明白為什麼一般項長那樣了，擺個 $n!$ 在分母就是特意要拿來消的。

現在知道用 k 階切近的辦法來將函數展開成多項式了，刻不容緩，我們馬上來試刀吧！

[2] 求導第一次會乘以 n，求導第二次乘以 $n-1$，求導第三次乘以 $n-2$，……

例題 9.1.1 試求 e^x 的馬克勞林展開。

解

所謂的馬克勞林 (Maclaurin) 展開，意思只不過是在 $x=0$ 處的泰勒展開，也就是說

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \tag{9.6}$$

我們想要寫出這個出來，就必須知道 e^x 在 $x=0$ 處的各階導數。不過這太容易了，e^x 不管怎麼微分都還是 e^x，代 0 以後就是 1 。於是有

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

例題 9.1.2 試求 $\sin(x)$ 的馬克勞林展開。

解

$\sin(x)$ 的高階導函數具有規律

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) & f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) & f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) & f^{(5)}(x) &= \cos(x) \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

再配合 $\sin(0)=0$、$\cos(0)=1$，便易知

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

$\cos(x)$ 的情況十分類似，你就自己動手寫吧！

e^x 與 $\sin(x)$ 及 $\cos(x)$ 的高階導函數都有很簡單的規律，所以用一般的方法寫出馬克勞林展開都是很容易的。而且收斂區間都是整個實數 $\mathbb{R}$ [3]，所以就算代一百萬，兩邊也是相等的。現在我們來檢查一件事，我剛剛說，只要在收斂區間內，本來想對 $f(x)$ 做的一些事，可以改對 $p(x)$ 做。我們知道 e^x 求導後是自己，於是我們將

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

作**逐項求導**，得到

$$0+1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

真的等於自己。我們再檢查 $\sin(x)$ 求導後是 $\cos(x)$，將

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

作逐項求導，得到

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

果然就是 $\cos(x)$ 的展開。

式子 (9.1) 好用在它具有一般性。一般而言，只要 $f(x)$ 能夠求導 k 次，我就可以照著操作寫出一個 k 次多項式來逼近它。卻不代表我們只能這樣做，有時候用這個方法會因為高階導數不太好寫而變得較為繁複。

[3] 判斷收斂區間的方法留待後面介紹。

事實上，我們還是可以根據各種不同函數的不同長相，用一些特殊的方法來寫出逼近多項式出來。在 Brook Taylor 於 1715 年提出他的理論以前，那些十七世紀的微積分先鋒們就各自寫出 $\sin(x)$、$\cos(x)$、$\arctan(x)$ 等等函數的展開，各自用了些奇奇怪怪的辦法。不過放心，在此我們只介紹些基本、好掌握的辦法。

譬如說 $\frac{1}{1-x}$，除了用那個一般的做法外，也可直接寫出

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

為什麼呢？因為這就是無窮等比級數的和呀。從此還得知了，收斂區間就是 $-1<x<1$ ④。

那麼 $\frac{1}{1+2x}$ 呢？把它看成 $\frac{1}{1-(-2x)}$ 就可以了，也就是說，將 $-2x$ 代在 $\frac{1}{1-x}$ 中的 x 裡面。於是就成為

$$1+(-2x)+(-2x)^2+\ldots+(-1)^n 2^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$$

至於收斂區間，我們也將 $-2x$ 代入 $-1<x<1$，得到 $-1<-2x<1$，再化簡成 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$。

至於 $\ln(1+x)$ 呢？我們知道它的導函數是 $\frac{1}{1+x}$，所以我們先寫出

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

然後作逐項積分，得到

$$C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

為了決定 C，代 $x=0$，得 $\ln(1+0)=0=C+0+0+\cdots$，所以 $C=0$。於是

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \quad ⑤$$

④ 公比的絕對值要小於 1。

⑤ 這裡對足碼做了一點平移，新的 n 是舊的 n 加上 1，原來的 n 從 0 開始，那麼新的 n 就會從 1 開始。而 $(-1)^{n-1}$ 若改寫成 $(-1)^{n+1}$ 亦可，畢竟 $(-1)^2=1$。

至於收斂區間問題，原本 $\frac{1}{1+x}$ 收斂區間是 $-1<x<1$，我們是拿它作積分來的，所以範圍大致一樣，唯有端點可能發生改變，變成 $-1<x\le 1$ ⑥。想知道為什麼會多個 1，可以將 1 代入冪級數，得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，交錯級數收斂 ⑦。

那如果是 $\sin(x)\cos(x)$ 呢？可以先各自展開再相乘。也可以看成 $\frac{\sin(2x)}{2}$，所以從 $\sin(x)$ 的展開用 $2x$ 代，然後整個除以 2，便有

$$\frac{\sin(2x)}{2}=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\dots\right)=\left(x-\frac{2^2x^3}{3!}+\dots\right)$$

那如果是 $\arctan(x)$ 怎麼辦呢？它求導後是 $\frac{1}{1+x^2}$ 嘛，所以我們先寫出

$$1-x^2+x^4-\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

然後做逐項積分，得到

$$C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

為了決定 C 是多少，代 $x=0$，得到

$$\arctan(0)=C+0+0+\dots$$

所以 $C=0$，便知 $\arctan(x)$ 的展開就是

$$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

接著各自將 -1 和 1 代入冪級數，都有交錯級數收斂，因此收斂區間也是從原本的 $-1<x<1$ 變成 $-1\le x\le 1$。

那如果是 $\sqrt{1+x}$ 又怎麼辦呢？它就是 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$，高中曾學過二項式定理

$$(x+y)^n=C_0^n y^n+C_1^n y^{n-1}x+C_2^n y^{n-2}x^2+\dots+C_n^n x^n \quad (9.7)$$

⑥ 不包含 -1 是顯而易見的，因為代入 $\ln(1+x)$ 會變成 $\ln 0$，然而對數裡必須是正的。

⑦ 一般來說，冪級數收斂不代表它就會收斂到原來函數，後面會再談這部分。

若 $y=1$ 就是

$$(x+1)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \ldots + C_n^n x^n$$

那是用在次方 n 是正整數的情況，我們現在次方不是正整數，也可以用嗎？牛頓在處理這問題的時候，將二項式定理推廣了，所以答案是可以的！所以我重寫一次

$$(x+1)^\alpha = C_0^\alpha + C_1^\alpha x + C_2^\alpha x^2 + \ldots \tag{9.8}$$

這對任何實數 α 都成立。這樣你可能產生一個問題，像 $C_3^{\frac{1}{2}}$ 該如何計算？回想一下：

$$C_3^7 = \frac{7\times 6\times 5}{1\times 2\times 3}$$

推廣方法就是照著寫

$$C_3^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})}{1\times 2\times 3} = \frac{1}{16}$$

從這推廣方法也可得知，本來式子 (9.7) 的寫法會停在 $C_n^n x^n$ 。但次方非正整數的時候，式子 (9.8) 可以一直寫下去，無窮多項。

於是我們現在就來處理 $\sqrt{1+x}$，寫成

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = C_0^{\frac{1}{2}} + C_1^{\frac{1}{2}} x + C_2^{\frac{1}{2}} x^2 + C_3^{\frac{1}{2}} x^3 + \ldots$$

前兩項的係數都不須特地算，因為任何數取 0 都是 1、任何數取 1 都是自己。另外算一下

$$C_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})}{1\times 2} = -\frac{1}{8}$$

$$C_3^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})}{1\times 2\times 3} = \frac{1}{16}$$

假如你還要繼續多算幾項的話，其實不須要慢慢寫，只要每次都在分子分母各補一項就好了。以 $C_4^{\frac{1}{2}}$ 為例，

$$C_4^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})\times(-\frac{5}{2})}{1\times 2\times 3\times 4} = \frac{1\times(-\frac{5}{2})}{16\times 4}$$

以此類推，要計算 $C_5^{\frac{1}{2}}$ 時，就分子補上 $-\frac{7}{2}$，分母補上 5 。所以

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{1}{2}} x^n$$

至於 $\arcsin(x)$，它求導後是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，我們可以先做 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 的展開

$$1 - \frac{t}{2} + C_2^{-\frac{1}{2}} t^2 + C_3^{-\frac{1}{2}} t^3 + \ldots = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} - \frac{5t^3}{16} + \ldots$$

接著代 $t = -x^2$ ，便有

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \ldots$$

好啦，接著可以做逐項積分：

$$C + x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{8\cdot 5} + \frac{5x^7}{16\cdot 7} + \ldots$$

代 $x = 0$，得到

$$\arcsin(0) = 0 = C + 0 + 0 + \ldots$$

所以 $C = 0$，於是 $\arcsin(x)$ 的展開就是

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{8\cdot 5} + \frac{5x^7}{16\cdot 7} + \ldots$$

收斂區間由 $-1 < x < 1$ 變成 $-1 \le x \le 1$ 。判斷方法較難，但不知道亦無妨。

目前為止寫了這一堆，就是想呈現給你看，在許多時候我們都避開了需要高階求導的辦法。因為那好用歸好用，但寫起來常常很麻煩。幸好我們常可以透過求導、積分、代入、加減乘除等等手段，來將所要處理的函數，用更基本、我們知道如何展開的函數來導出它的展開。以下將一些基本常見的函數展開整理在下面：

	函數	冪級數展開	收斂區間
★	e^x	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$\mathbb{R}$
★	$\sin(x)$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$	$\mathbb{R}$
★	$\cos(x)$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$	$\mathbb{R}$
★	$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$	$(-1,1)$
⋆	$\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$	$(-1,1)$
⋆	$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$	$(-1,1]$
	$\arctan(x)$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$	$[-1,1]$
★	$(x+1)^\alpha$	$C_0^\alpha+C_1^\alpha x+C_2^\alpha x^2+\cdots$	$(-1,1)$
	$\sqrt{1+x}$	$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\cdots$	$[-1,1]$
	$\arcsin(x)$	$x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{3x^5}{8\cdot 5}+\cdots$	$[-1,1]$

★ 請你背起來，其它的便可由這些推得。

⋆ 可以不背，能背起來更好。

只有五個要背而已，而且第一個實在很好記，第二、三個長得和第一個很像可以一起背，第四個是無窮等比級數，第五個也只是二項式定理的推廣，所以記誦的負擔並不大。

例題 9.1.3 試求 xe^x 的馬克勞林展開。

解

先展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

接著整個乘以 x，便有

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots$$

例題 9.1.4 求 e^{-x^2} 的馬克勞林展開。

解

先展開

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

接著用 $t = -x^2$ 代入，便有

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

例題 9.1.5 求 $\frac{x^2}{1+x^3}$ 的馬克勞林展開。

解

我們可以將 $\frac{x^2}{1+x^3}$ 拆成 $x^2 \cdot \frac{1}{1+x^3}$，所以先展開

$$\frac{1}{1-(-x^3)} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots$$

然後跟 x^2 相乘，也就是說每一項的次方都增加二，變成

$$\frac{x^2}{1+x^3} = x^2 - x^5 + x^8 - x^{11} + \cdots$$

也可以將其視為 $\ln(1+x^3)$ 的導函數再除以 3，但應

該還是前一個方法快些。

這題若以 $\sum$ 的形式來寫，就是

$$x^2 \cdot \frac{1}{1+x^3} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n$$
$$= x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+2}$$

例題 9.1.6 求 $\frac{1}{3-2x}$ 的馬克勞林展開。

解

注意分母那邊是 3 不是 1，所以沒辦法直接套我們有背的那個。但這很容易解決，只要將 3 提出來，便有

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2x}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + (\frac{2x}{3}) + (\frac{2x}{3})^2 + (\frac{2x}{3})^3 + \cdots\right)$$

例題 9.1.7 將 e^x 於 $x = 2$ 處做泰勒展開。

解

這次不是馬克勞林展開了，而是要在 $x = 2$ 的地方展開。有個小技巧！我先設 $t = x - 2$，那麼 $e^x = e^{t+2}$，在 $x = 2$ 處就是在 $t = 0$ 處。因此我們就有

$$e^{t+2} = e^2 \cdot e^t = e^2\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots\right)$$

此時再用 $t = x - 2$ 代回去

$$e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \dots$$

若以 $\sum$ 的形式來寫，就是

$$e^2 \cdot e^t = e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

用 $t = x-2$ 代回去

$$e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

例題 9.1.8 將 $\ln(x)$ 於 $x=3$ 處做泰勒展開。

解

這題也類似，在 $x=3$ 處做泰勒展開會做出形如 $\sum a_n(x-3)^n$ 的冪級數，所以我們就設 $t=x-3$，使 $\ln(x)$ 變成 $\ln(t+3)$，然後做馬克勞林展開，做完再代回 x。由於是 $t+3$ 不是 $t+1$，所以寫成

$$\begin{aligned}\ln(t+3) &= \ln 3 + \ln\left(1+\frac{t}{3}\right)\\ &= \ln 3 + \left((\frac{t}{3}) - \frac{(\frac{t}{3})^2}{2} + \frac{(\frac{t}{3})^3}{3} - \cdots\right)\end{aligned}$$

接著代 $t = x-3$ 回去

$$\begin{aligned}&= \ln 3 + \frac{(x-3)}{3} - \frac{(\frac{(x-3)}{3})^2}{2} + \frac{(\frac{(x-3)}{3})^3}{3} + \cdots\\ &= \ln 3 + \frac{(x-3)}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + \frac{(x-3)^3}{81} + \cdots\end{aligned}$$

若以 $\sum$ 的形式來寫，就是

$$\begin{aligned}\ln(t+3) &= \ln 3 + \ln(1+\frac{t}{3})\\ &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n3^n} t^n\end{aligned}$$

接著代 $t=x-3$ 回去

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n3^n}(x-3)^n$$

用這樣寫好像比較好喔。不但寫的人比較簡便，看的人也較一目了然。

例題 9.1.9 求 $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ 的馬克勞林展開。

解

不要被 $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ 的長相嚇到了，對數裡的乘除就是加減、對數裡的次方就是乘。所以

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)&=\frac{1}{2}\cdot\Big(\ln(1+x)-\ln(1-x)\Big)\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}x^n\end{aligned}$$

觀察當 n 是奇數的時候，$(-1)^{n+1}+1=1+1=2$，然而當 n 是偶數的時候，$(-1)^{n+1}+1=-1+1=0$。所以

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

例題 9.1.10 求 $\tan(x)$ 的馬克勞林展開。

解

由於 $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ 所以可以拿 $\sin(x)$ 與 $\cos(x)$ 的展開來相除。這裡介紹另外一招，**待定 數法**。就是先設

$$\tan(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

注意到 $\tan(x)$ 是奇函數，所以它必然只有奇次項。於是可以寫成

$$\tan(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \cdots$$

沒注意到也沒關係，等下還是會解出 $a_0 = a_2 = \cdots = 0$ 。然後我們寫成

$$\sin(x) = \tan(x) \cdot \cos(x)$$

所以就有

$$x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \left(a_1 x + a_3 x^3 + \cdots\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$$

比較等號兩邊的一次項，我們有

$$1 = a_1 \times 1$$

接著再比較三次項，我們有

$$-\frac{1}{6} = a_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + a_3 \times 1$$

看我們需要將 $\tan(x)$ 展開到幾次項，就比較到幾次項。